Απόδειξη Έχουμε

$$H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2).$$

Σχηματίζουμε τέλειο τετράγωνο γράφοντας

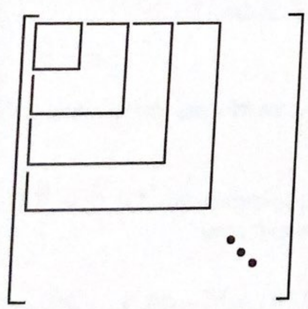
$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2.$$

Υποθέτουμε ότι η H είναι θετικά ορισμένη. Θέτοντας $h_2 = 0$, διαπιστώνουμε ότι $a > 0$. Θέτοντας $h_1 = -(b/a)h_2$, παίρνουμε $c - b^2/a > 0$ ή $ac - b^2 > 0$. Αντιστρόφως, αν $a > 0$ και $c - b^2/a > 0$, τότε η $H(\mathbf{h})$ είναι άθροισμα τετραγώνων, άρα $H(\mathbf{h}) \geq 0$. Αν $H(\mathbf{h}) = 0$, τότε όλα τα τετράγωνα πρέπει να είναι μηδέν. Από αυτό έπεται ότι αμφότερα τα h_1 και h_2 πρέπει να είναι ίσα με μηδέν, άρα η $H(\mathbf{h})$ είναι θετικά ορισμένη. ■

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η $H(\mathbf{h})$ είναι αρνητικά ορισμένη αν και μόνο αν $a < 0$ και $ac - b^2 > 0$. Μια εναλλακτική διατύπωση είναι ότι η $H(\mathbf{h})$ είναι θετικά ορισμένη αν $a + c = \operatorname{trace} B > 0$ και $\det B > 0$. Η $H(\mathbf{h})$ είναι αρνητικά ορισμένη αν $a + c < 0$ και $\det B > 0$.

Κριτήριο οριζουσών για το αν ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος

Υπάρχουν παρόμοιοι τρόποι που μας επιτρέπουν να ελέγχουμε αν ένας συμμετρικός πίνακας $n \times n$ B είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένος, δίνοντάς μας έτσι ένα κριτήριο για τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου των συναρτήσεων n μεταβλητών. Ας θεωρήσουμε τους n τετραγωνικούς υποπίνακες κατά μήκος της διαγωνίου (βλ. Σχήμα 3.3.5). Ο B είναι θετικά ορισμένος (δηλαδή η τετραγωνική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον B είναι θετικά ορισμένη) αν και μόνο αν οι ορίζουσες αυτών των διαγώνιων υποπινάκων είναι όλες μεγαλύτερες του μηδενός. Για αρνητικά ορισμένο B, τα πρόσημα θα πρέπει να είναι εναλλάξ < 0 και > 0. Δεν θα αποδείξουμε τη γενική αυτή περίπτωση.[7] Στην περίπτωση που οι ορίζουσες των διαγώνιων υποπινάκων είναι όλες μη μηδενικές, αλλά ο εσσιανός πίνακας δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος, το κρίσιμο σημείο είναι ***σαγματικού τύπου***. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να δείξουμε ότι το σημείο δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο, με τον τρόπο που ακολουθήσαμε στο Παράδειγμα 2.



Σχήμα 3.3.5 Οι «διαγώνιοι» υποπίνακες χρησιμοποιούνται στο κριτήριο που μας επιτρέπει να ελέγχουμε αν ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος· πρέπει να έχουν όλοι ορίζουσα > 0.

---

[7] Αυτό αποδεικνύεται, για παράδειγμα, στο K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961, σελ. 249–251. Για τους φοιτητές με επαρκείς γνώσεις γραμμικής άλγεβρας πρέπει να σημειωθεί ότι ο B είναι θετικά ορισμένος όταν όλες του οι ιδιοτιμές (οι οποίες είναι κατ' ανάγκη πραγματικές διότι ο B είναι συμμετρικός) είναι θετικές.

Γενικά κριτήρια δεύτερης παραγώγου (n μεταβλητές)

Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ένα κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης $f\colon U \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 και U ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $\mathbf{x}_0$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Αν ο εσσιανός πίνακας $\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\}$ είναι θετικά ορισμένος, τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της f. Αν ο εσσιανός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, το $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο. Αν ο εσσιανός πίνακας δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος, αλλά η ορίζουσά του είναι μη μηδενική, τότε είναι ***σαγματικού τύπου*** (δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο). Αν η ορίζουσα της εσσιανής είναι μηδέν, λέμε ότι είναι ***εκφυλισμένου τύπου*** και δεν μπορούμε να πούμε τίποτα για τη φύση του κρίσιμου σημείου χωρίς περαιτέρω ανάλυση. Στο Σχήμα 3.3.5 παρουσιάζεται ένα απλό κριτήριο για το αν ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών, το κριτήριο για τα μέγιστα και ελάχιστα απλουστεύεται σημαντικά.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου (δύο μεταβλητές)

Από το Λήμμα 2 και το Θεώρημα 5 έπεται το εξής:

Θεώρημα 6 Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για σημεία μεγίστου και ελαχίστου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών Έστω ότι η $f(x, y)$ είναι κλάσης C^2 σε ένα ανοιχτό σύνολο U του $\mathbb{R}^2$. Ένα σημείο (x_0, y_0) είναι (αυστηρό) τοπικό ελάχιστο της f αν ισχύουν οι παρακάτω τρεις συνθήκες:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$

(iii) $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ στο (x_0, y_0)

(Η D καλείται ***διακρίνουσα*** της εσσιανής.) Αν στο (ii) έχουμε < 0 αντί για > 0 και η συνθήκη (iii) παραμείνει αμετάβλητη, τότε έχουμε (αυστηρό) τοπικό μέγιστο.

Αν $D < 0$ (π.χ. αν $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 0$ ή $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0$, αλλά $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0$), το (x_0, y_0) είναι ***σαγματικού τύπου*** (ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο).

Παράδειγμα 6 Χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από την $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$.

Λύση Όπως στο Παράδειγμα 5, βρίσκουμε ότι $f(0, 0) = 0$, η αρχή των αξόνων είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και η εσσιανή είναι

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2,$$

η οποία είναι προφανώς θετικά ορισμένη. Άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6. Στο $(0, 0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 4$ και $\partial^2 f/\partial x\, \partial y = -2$. Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) ισχύουν, άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0)$. ▲

Αν στο Θεώρημα 6 έχουμε $D < 0$, τότε έχουμε σαγματικό σημείο. Μάλιστα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $f(x, y)$ είναι μεγαλύτερο από το $f(x_0, y_0)$ καθώς απομακρυνόμαστε από το (x_0, y_0) κατά κάποια κατεύθυνση και μικρότερο κατά την ορθογώνια κατεύθυνση (βλ. Άσκηση 32). Η γενική εικόνα μοιάζει επομένως με αυτή του Σχήματος 3.3.3. Η μορφή του γραφήματος κοντά στο (x_0, y_0) στην περίπτωση όπου $D = 0$ πρέπει να προσδιοριστεί με περαιτέρω ανάλυση.

Συνοψίζουμε τη διαδικασία για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών: Αφού βρούμε όλα τα κρίσιμα σημεία και υπολογίσουμε τις αντίστοιχες εσσιανές, κάποιες από αυτές τις εσσιανές μπορεί να είναι θετικά ορισμένες, που σημαίνει ότι τα αντίστοιχα σημεία είναι τοπικά ελάχιστα, κάποιες μπορεί να είναι αρνητικά ορισμένες, που σημαίνει ότι τα αντίστοιχα σημεία είναι τοπικά μέγιστα, και κάποιες μπορεί να μην είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένες, που σημαίνει ότι τα αντίστοιχα σημεία είναι σαγματικά σημεία. Το σχήμα του γραφήματος σε ένα σαγματικό σημείο όπου $D < 0$ μοιάζει με αυτό του Σχήματος 3.3.3. Τα κρίσιμα σημεία για τα οποία $D \neq 0$ ονομάζονται ***μη εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία***. Αυτού του είδους τα σημεία είναι σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά σημεία. Τα υπόλοιπα κρίσιμα σημεία, όπου $D = 0$, μπορούν να ελεγχθούν απευθείας, με χρήση των συνόλων στάθμης και των τομών ή με κάποια άλλη μέθοδο. Λέμε ότι αυτού του είδους τα κρίσιμα σημεία είναι ***εκφυλισμένα***· οι μέθοδοι που αναπτύσσουμε σε αυτό το κεφάλαιο δεν μπορούν να μας δώσουν μια εικόνα για τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά σε τέτοια σημεία, γι' αυτό τα εξετάζουμε κατά περίπτωση.

Παράδειγμα 7 Βρείτε τα τοπικά μέγιστα, ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1).$$

Λύση Αρχικά πρέπει να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, υπολογίζουμε το

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{j}.$$

Άρα $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ αν και μόνο αν $(x, y) = (0, 0)$, οπότε το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0)$. Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε αν πρόκειται για μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό σημείο. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$$

και

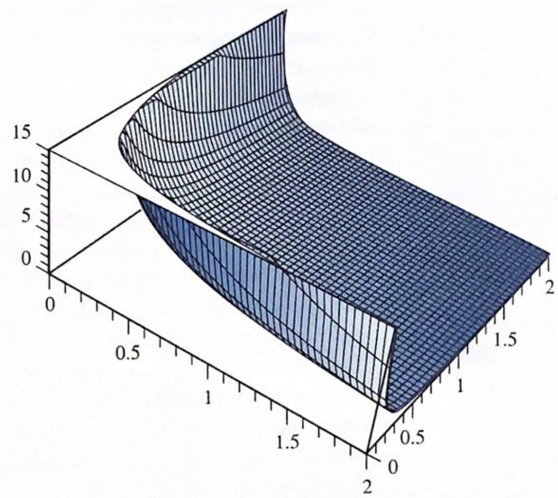
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0) = 0,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Επειδή $(\partial^2 f/\partial x^2)(0, 0) > 0$, από το Θεώρημα 6 συμπεραίνουμε ότι το $(0, 0)$ είναι τοπικό ελάχιστο. (Μπορείτε να αποδείξετε το ίδιο χρησιμοποιώντας μόνο το γεγονός ότι η $\log t$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $t > 0$;) ▲

ράδειγμα 8 Το γράφημα της συνάρτησης $g(x, y) = 1/xy$ είναι μια επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$. Βρείτε τα σημεία της S που βρίσκονται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$. (Βλ. Σχήμα 3.3.6.)



Σχήμα 3.3.6 Η επιφάνεια $z = 1/xy$ ορισμένη στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy. (Οι εικόνες στα άλλα τεταρτημόρια είναι παρόμοιες, αλλά προσέξτε ότι $z < 0$ στο δεύτερο και στο τέταρτο τεταρτημόριο.)

Λύση Κάθε σημείο της S είναι της μορφής $(x, y, 1/xy)$. Η απόσταση αυτού του σημείου από την αρχή των αξόνων είναι

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}.$$

Είναι ευκολότερο να εργαστούμε με το τετράγωνο της απόστασης d, και επομένως έστω $f(x, y) = x^2 + y^2 + (1/x^2y^2)$, η οποία θα έχει το ίδιο ελάχιστο σημείο. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι $d(x, y)^2 \geq d(x_0, y_0)^2$ αν και μόνο αν $d(x, y) \geq d(x_0, y_0)$. Προσέξτε ότι η $f(x, y)$ γίνεται πολύ μεγάλη καθώς τα x και y μεγαλώνουν. Η $f(x, y)$ γίνεται επίσης πολύ μεγάλη καθώς το (x, y) πλησιάζει τον άξονα x ή y όπου η f δεν ορίζεται, άρα η f πρέπει να έχει ελάχιστο σε κάποιο κρίσιμο σημείο. Τα κρίσιμα σημεία προσδιορίζονται από τις

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0,$$

δηλαδή $x^4y^2 - 1 = 0$ και $x^2y^4 - 1 = 0$. Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $y^2 = 1/x^4$ και, αντικαθιστώντας στη δεύτερη,

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}.$$

Επομένως, $x = \pm 1$ και $y = \pm 1$, άρα η f έχει τέσσερα κρίσιμα σημεία, τα $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ και $(-1, -1)$. Η τιμή της f σε όλα αυτά τα σημεία είναι 3, άρα είναι όλα σημεία ελαχίστου. Συνεπώς, τα σημεία της επιφάνειας που βρίσκονται πλησιέστερα στο σημείο $(0, 0, 0)$ είναι τα $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ και $(-1, -1, 1)$ και η ελάχιστη απόσταση είναι $\sqrt{3}$. Συμφωνεί αυτό με το γράφημα του Σχήματος 3.3.6; ▲

Παράδειγμα 9 Αναλύστε τη συμπεριφορά της $z = x^5y + xy^5 + xy$ στα κρίσιμα σημεία της.

Λύση Οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1).$$

Οι όροι $5x^4 + y^4 + 1$ και $5y^4 + x^4 + 1$ είναι πάντα μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1, άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3$$

και

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1.$$

Άρα στο $(0, 0)$ έχουμε $D = -1$, οπότε το $(0, 0)$ είναι μη εκφυλισμένο σαγματικό σημείο και το γράφημα της z κοντά στο $(0, 0)$ μοιάζει με το γράφημα του Σχήματος 3.3.3. ▲

Ακολουθεί ένα παράδειγμα συνάρτησης τριών μεταβλητών.

Παράδειγμα 10 Θεωρήστε την $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Δείξτε ότι τα $(0, 0, 0)$ και $(-1, 1, 1)$ είναι αμφότερα κρίσιμα σημεία. Προσδιορίστε αν είναι τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα, σαγματικά σημεία ή τίποτα από αυτά.

Λύση Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2xz \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2xy,$$

οι οποίες μηδενίζονται όλες στα $(0, 0, 0)$ και $(-1, 1, 1)$. Επομένως τα σημεία αυτά είναι κρίσιμα. Η εσσιανή της f στο $(0, 0, 0)$ είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι οι $[2]$ και $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ και η ίδια η εσσιανή, και όλοι τους έχουν θετικές ορίζουσες. Άρα (πρβλ. Σχήμα 3.3.5) το $(0, 0, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Από την άλλη πλευρά, ο εσσιανός πίνακας της f στο $(-1, 1, 1)$ είναι

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πρώτου διαγώνιου πίνακα είναι 2, η ορίζουσα του δεύτερου διαγώνιου πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι μηδέν, ενώ η ορίζουσα της εσσιανής είναι -16. Άρα το κρίσιμο σημείο $(-1, 1, 1)$ είναι σαγματικού τύπου (ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο). ▲

Ολικά μέγιστα και ελάχιστα

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με μια αναφορά στη θεωρία των *απόλυτων*, ή *ολικών*, μεγίστων και ελαχίστων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Δυστυχώς, ο εντοπισμός των απόλυτων μεγίστων και ελαχίστων για τις συναρτήσεις του $\mathbb{R}^n$ είναι, εν γένει, δυσκολότερο πρόβλημα απ' ό,τι για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Ορισμός Έστω $f\colon A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$. Λέμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ είναι σημείο ***ολικού μεγίστου*** (ή ***ολικού ελαχίστου***) της f αν $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ [ή $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$] για κάθε $\mathbf{x} \in A$.

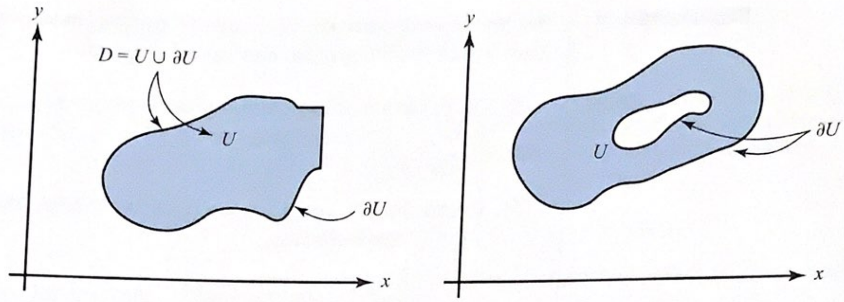
Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μαθαίνει κανείς —συνήθως χωρίς απόδειξη— ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα I παίρνει την απόλυτα μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της σε κάποιο σημείο $\mathbf{x}_0$ του I. Μια γενίκευση αυτού του θεωρητικού αποτελέσματος ισχύει και στον $\mathbb{R}^n$. Αυτού του είδους τα θεωρήματα μας εγγυώνται ότι τα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου που αναζητούμε υπάρχουν πράγματι, οπότε η αναζήτησή τους δεν είναι μάταιη.

Ορισμός Λέμε ότι ένα σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι ***φραγμένο*** αν υπάρχει κάποιος αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|\mathbf{x}\| < M$ για κάθε $\mathbf{x} \in D$. Ένα σύνολο είναι ***κλειστό*** αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Σαν ένα σημαντικό παράδειγμα, σημειώνουμε ότι τα σύνολα στάθμης $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\}$ μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντα κλειστά.

Επομένως, ένα σύνολο είναι φραγμένο αν υπάρχει κάποια (μεγάλη) μπάλα που το περιέχει αυστηρά. Η κατάλληλη γενίκευση του θεωρήματος σχετικά με τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου των συναρτήσεων μίας μεταβλητής είναι το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 7 Θεώρημα ύπαρξης σημείων ολικού μεγίστου και ελαχίστου Αν το D είναι κλειστό και φραγμένο στον $\mathbb{R}^n$ και η $f\colon D \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει τις απόλυτα μέγιστες και ελάχιστες τιμές της σε κάποια σημεία $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}_1$ του D.



Σχήμα 3.3.7 $D = U \cup \partial U$: Δύο παραδείγματα περιοχών το σύνορο των οποίων είναι μια τμηματικά ομαλή καμπύλη.

Με απλά λόγια, τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}_1$ είναι τα σημεία όπου η f παίρνει τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της. Όπως στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, αυτά τα σημεία δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικά.

Ας υποθέσουμε ότι $D = U \cup \partial U$, όπου το U είναι ανοιχτό και ∂U είναι το σύνορό του. Αν $D \subset \mathbb{R}^2$, υποθέτουμε ότι το ∂U είναι μια τμηματικά ομαλή καμπύλη, δηλαδή το D είναι ένα χωρίο που φράσσεται από μια συλλογή ομαλών καμπυλών —για παράδειγμα, ένα τετράγωνο ή τα σύνολα που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.3.7.

Αν τα $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{x}_1$ ανήκουν στο U, από το Θεώρημα 4 γνωρίζουμε ότι είναι κρίσιμα σημεία της f. Αν ανήκουν στο ∂U, και το ∂U είναι ομαλή καμπύλη (δηλαδή η εικόνα μιας ομαλής διαδρομής $\mathbf{c}$ με $\mathbf{c}' \neq 0$), τότε είναι σημεία μεγίστου ή ελαχίστου της f ιδωμένης ως συνάρτησης στο ∂U. Αυτές οι παρατηρήσεις μάς δίνουν μια μέθοδο για να βρίσκουμε τις απόλυτα μέγιστες και ελάχιστες τιμές της f σε ένα χωρίο D.

Στρατηγική εύρεσης των σημείων απόλυτου μεγίστου και ελαχίστου σε χωρίο με σύνορο Έστω f μια συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο D του $\mathbb{R}^2$, το οποίο φράσσεται από μια ομαλή κλειστή καμπύλη. Για να βρούμε το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο της f στο D:

(i) Εντοπίζουμε όλα τα κρίσιμα σημεία της f στο U.

(ii) Βρίσκουμε όλα τα κρίσιμα σημεία της f θεωρώντας τη ως συνάρτηση που ορίζεται μόνο στο ∂U.

(iii) Υπολογίζουμε τις τιμές της f σε όλα αυτά τα κρίσιμα σημεία.

(iv) Συγκρίνουμε όλες αυτές τις τιμές και επιλέγουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη.

Αν το D είναι κάποιο χωρίο που φράσσεται από μια συλλογή ομαλών καμπυλών (όπως ένα τετράγωνο), ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία, συμπεριλαμβάνοντας όμως στο βήμα (iii) τα σημεία τομής των καμπυλών (όπως τις γωνίες του τετραγώνου).

Όλα τα βήματα εκτός του βήματος (ii) θα πρέπει να σας είναι γνώριμα. Ένας τρόπος να εκτελέσουμε το βήμα (ii) στο επίπεδο είναι να βρούμε μια ομαλή παραμετρικοποίηση του ∂U, δηλαδή να βρούμε μια διαδρομή $\mathbf{c}\colon I \to \partial U$, όπου I είναι κάποιο διάστημα, η οποία να είναι επί του ∂U. Δεύτερον, θεωρούμε τη συνάρτηση μίας μεταβλητής $t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$, όπου $t \in I$, και εντοπίζουμε τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου $t_0, t_1 \in I$ (δεν πρέπει να ξεχάσουμε να ελέγξουμε τα άκρα!). Τότε τα $\mathbf{c}(t_0)$, $\mathbf{c}(t_1)$ θα είναι *σημεία* μεγίστου και ελαχίστου της f ως συνάρτησης ορισμένης στο ∂U. Μια άλλη μέθοδος εκτέλεσης του βήματος (ii) είναι η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange, που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 11 Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στον δίσκο D που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση

(i) Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία θέτουμε $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Άρα, $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$, και επομένως το $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο στον ανοιχτό δίσκο $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(ii) Το σύνορο ∂U μπορεί να παραμετρικοποιηθεί από την καμπύλη $\mathbf{c}(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Επομένως,

$$f(\mathbf{c}(t)) = \sin^2 t + \cos^2 t - \sin t - \cos t + 1 = 2 - \sin t - \cos t = g(t).$$

Για να βρούμε το μέγιστο και ελάχιστο της f στο ∂U, αρκεί να εντοπίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της g. Έχουμε $g'(t) = 0$ μόνο όταν

$$\sin t = \cos t, \qquad \text{δηλαδή όταν} \qquad t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

Άρα τα υποψήφια σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο ∂U είναι τα $\mathbf{c}(\pi/4)$, $\mathbf{c}(5\pi/4)$ και τα άκρα $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$.

(iii) Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία είναι $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ από το βήμα (i) και, από το βήμα (ii),

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2},$$

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}$$

και

$$f(\mathbf{c}(0)) = f(\mathbf{c}(2\pi)) = f(0, 1) = 1.$$

(iv) Συγκρίνοντας όλες τις τιμές $\frac{1}{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, 1 διαπιστώνουμε ότι το απόλυτο ελάχιστο είναι το $\frac{1}{2}$ και το απόλυτο μέγιστο το $2 + \sqrt{2}$. ▲

Στην Ενότητα 3.4, θα εξετάσουμε μια γενίκευση της στρατηγικής εύρεσης του απόλυτου μεγίστου και ελαχίστου για χωρία U του $\mathbb{R}^n$.

Ασκήσεις

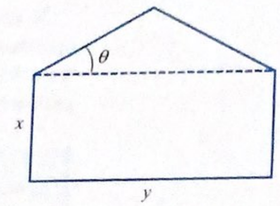
Στις Ασκήσεις 1 έως 16, βρείτε τα κρίσιμα σημεία των δεδομένων συναρτήσεων και προσδιορίστε αν είναι τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$
3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$
5. $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$
6. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$
7. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$
8. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ [εξετάστε μόνο το κρίσιμο σημείο $(0, 0)$]
9. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ [εξετάστε μόνο τα τρία κρίσιμα σημεία $(0, 0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ και $(0, \sqrt{\pi})$]
10. $f(x, y) = y + x \sin y$
11. $f(x, y) = e^x \cos y$

(i) Δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f και ότι είναι τοπικό ελάχιστο.

(ii) Εξηγήστε (όχι αυστηρά) γιατί η f δεν έχει απόλυτο ελάχιστο.

52. Έστω ότι ένα πεντάγωνο σχηματίζεται από ένα ορθογώνιο, στο πάνω μέρος του οποίου ακουμπά ένα ισοσκελές τρίγωνο (βλ. Σχήμα 3.3.8). Αν το μήκος της περιμέτρου είναι σταθερό, να βρείτε το μέγιστο δυνατό εμβαδόν.



Σχήμα 3.3.8 Μεγιστοποιήστε το εμβαδόν για δεδομένη περίμετρο.

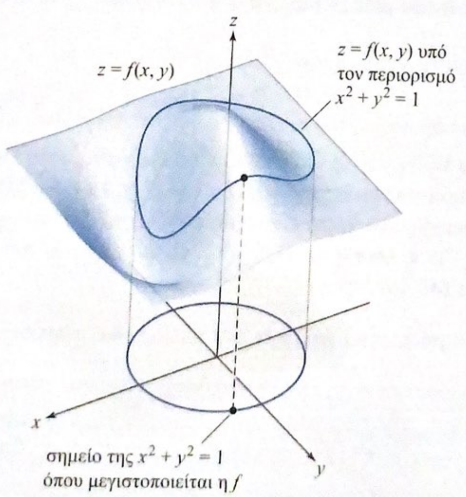
3.4 Ακρότατα υπό συνθήκη και πολλαπλασιαστές Lagrange

Πολλές φορές απαιτείται να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε μια συνάρτηση υπό κάποιους *περιορισμούς* ή *συνθήκες*. Για παράδειγμα, μπορεί να χρειάζεται να μεγιστοποιήσουμε την $f(x, y)$ υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$, δηλαδή τα (x, y) να ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο. Γενικότερα, μπορεί να χρειαστεί να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε την $f(x, y)$ υπό τη συνθήκη τα (x, y) να ικανοποιούν επίσης μια εξίσωση $g(x, y) = c$, όπου g είναι κάποια συνάρτηση και c κάποια σταθερά [στο προηγούμενο παράδειγμα, $g(x, y) = x^2 + y^2$ και $c = 1$]. Το σύνολο αυτών των (x, y) είναι μια καμπύλη στάθμης της g.

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να αναπτύξουμε κάποιες μεθόδους για τον χειρισμό αυτών των προβλημάτων. Στο Σχήμα 3.4.1 απεικονίζεται το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y)$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το μέγιστο της f φαίνεται να είναι στο $(0, 0)$. Ωστόσο, ας υποθέσουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει αυτό το μέγιστο αλλά μόνο το μέγιστο της $f(x, y)$ όταν το (x, y) ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή όταν $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = 1$ τέμνει το γράφημα της $z = f(x, y)$ κατά μία καμπύλη που ανήκει στο γράφημα. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης ή της ελαχιστοποίησης της $f(x, y)$ υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$ συνίσταται στην εύρεση του σημείου αυτής της καμπύλης όπου το z παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή.

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Γενικά, έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δεδομένες συναρτήσεις C^1 και έστω S το σύνολο στάθμης της g με τιμή c [υπενθυμίζουμε ότι αυτό είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $g(\mathbf{x}) = c$].



Σχήμα 3.4.1 Η γεωμετρική σημασία της μεγιστοποίησης της f υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$.

Η έννοια των τοπικών μεγίστων και τοπικών ελαχίστων της f (τοπικών ακροτάτων) ορίζεται και όταν η f περιοριστεί στο S, και ένα απόλυτο μέγιστο (η μεγαλύτερη τιμή) ή απόλυτο ελάχιστο (η μικρότερη τιμή) πρέπει να είναι τοπικό ακρότατο. Η παρακάτω μέθοδος μας παρέχει την απαραίτητη συνθήκη για να έχουμε ακρότατο υπό συνθήκη:

Θεώρημα 8 Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις κλάσης C^1. Έστω $\mathbf{x}_0 \in U$ με $g(\mathbf{x}_0) = c$ και έστω S το σύνολο στάθμης της g με τιμή c [υπενθυμίζουμε ότι αυτό είναι το σύνολο των σημείων $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την $g(\mathbf{x}) = c$]. Υποθέτουμε ότι $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

Αν η $f|S$, δηλαδή ο «περιορισμός της f στο S», έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο S στο σημείο $\mathbf{x}_0$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός λ (ο οποίος μπορεί να είναι μηδέν) τέτοιος ώστε

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

Γενικά, λέμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ όπου ισχύει η εξίσωση (1) είναι ***κρίσιμο σημείο*** της $f|S$.

Απόδειξη Δεν έχουμε αναπτύξει αρκετές τεχνικές ώστε να δώσουμε μια πλήρη απόδειξη, αλλά μπορούμε να περιγράψουμε τα βασικά της σημεία. (Οι επιπλέον τεχνικές λεπτομέρειες που χρειάζονται εξετάζονται στην Ενότητα 3.5 και στο διαδικτυακό συμπλήρωμα.)

Στην Ενότητα 2.6 μάθαμε ότι, για $n = 3$, ο εφαπτόμενος χώρος ή το εφαπτόμενο επίπεδο του S στο $\mathbf{x}_0$ είναι ο χώρος που είναι ορθογώνιος με το $\nabla g(\mathbf{x}_0)$. Για αυθαίρετο n, μπορούμε να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο του S στο $\mathbf{x}_0$ με τον ίδιο τρόπο. Για να τεκμηριώσουμε αυτό τον ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε τις εφαπτόμενες των διαδρομών $\mathbf{c}(t)$ που ανήκουν στο S, ως εξής: Αν $\mathbf{c}(t)$ είναι μια διαδρομή στο S και $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, τότε το $\mathbf{c}'(0)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο $\mathbf{x}_0$. Όμως

$$\frac{d}{dt} g(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt} c = 0,$$

και, από την άλλη πλευρά, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$\frac{d}{dt} g(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0),$$

άρα $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$, δηλαδή το $\mathbf{c}'(0)$ είναι ορθογώνιο με το $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.

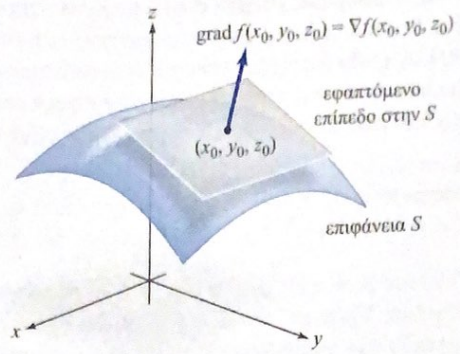
Αν η $f|S$ έχει μέγιστο στο $\mathbf{x}_0$, η $f(\mathbf{c}(t))$ έχει μέγιστο για $t = 0$. Από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, $df(\mathbf{c}(t))/dt|_{t=0} = 0$. Επομένως, από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$0 = \frac{d}{t} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0).$$

Άρα το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη κάθε καμπύλης του S, οπότε είναι κάθετο σε ολόκληρο τον εφαπτόμενο χώρο του S στο $\mathbf{x}_0$. Επειδή ο χώρος που είναι κάθετος σε αυτό τον εφαπτόμενο χώρο είναι μια ευθεία, τα $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ και $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ είναι παράλληλα. Επειδή $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, έπεται ότι το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι πολλαπλάσιο του $\nabla g(\mathbf{x}_0)$, το οποίο είναι το συμπέρασμα του θεωρήματος. ■

Μπορούμε να βγάλουμε ένα γεωμετρικό συμπέρασμα από αυτή την απόδειξη.

Θεώρημα 9 Αν η f, περιορισμένη σε μια επιφάνεια S, έχει μέγιστο ή ελάχιστο στο $\mathbf{x}_0$, τότε το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι κάθετο στην S στο $\mathbf{x}_0$ (βλ. Σχήμα 3.4.2).



Η γεωμετρία των
ό συνθήκη.

Αυτά τα αποτελέσματα μας λένε ότι για να βρούμε τα ακρότατα υπό συνθήκη της f, πρέπει να ψάξουμε μεταξύ εκείνων των σημείων $\mathbf{x}_0$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα των δύο αυτών θεωρημάτων. Θα δώσουμε διάφορα παραδείγματα χρήσης καθενός εξ αυτών.

Όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Θεωρήματος 8, αναζητούμε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ και μια σταθερά λ, που καλείται ***πολλαπλασιαστής Lagrange***, τέτοια ώστε $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Αυτή η μέθοδος έχει πιο αναλυτικό χαρακτήρα από τη γεωμετρική μέθοδο του Θεωρήματος 9. Είναι ενδιαφέρον ότι ο Euler εισήγαγε αυτούς τους πολλαπλασιαστές το 1744, περίπου 40 χρόνια πριν από τον Lagrange!

Η εξίσωση (1) λέει ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι ανάλογες αυτών της g. Για να βρούμε τα σημεία $\mathbf{x}_0$ όπου συμβαίνει αυτό πρέπει να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) &= c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ως προς $x_1, \dots, x_n$ και λ.

Ένας άλλος τρόπος θεώρησης αυτών των εξισώσεων είναι ο εξής: Φανταζόμαστε το λ σαν μια επιπλέον μεταβλητή και σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$h(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, \dots, x_n) - c].$$

Το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange λέει ότι για να βρούμε τα ακρότατα της $f|S$ πρέπει να εξετάσουμε τα κρίσιμα σημεία της h. Αυτά βρίσκονται με επίλυση των εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \dots, x_n) - c \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

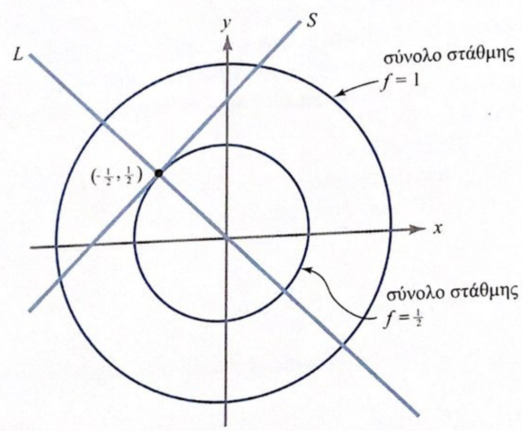
που είναι οι ίδιες με τις εξισώσεις (2) που είδαμε παραπάνω.

Στο Θεώρημα 10, στη συνέχεια της ενότητας, θα δοθούν κριτήρια δεύτερης παραγώγου για τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου αντίστοιχα με αυτά της Ενότητας 3.3. Ωστόσο, σε πολλά προβλήματα μπορούμε να διακρίνουμε τα σημεία μεγίστου από τα σημεία ελαχίστου με απευθείας παρατήρηση ή με γεωμετρικά μέσα. Επειδή αυτό είναι συχνά απλούστερο, θα εξετάσουμε πρώτα μερικά παραδείγματα αυτού του τύπου.

Παράδειγμα 1 Έστω $S \subset \mathbb{R}^2$ η ευθεία που διέρχεται από το $(-1, 0)$ με κλίση 45°, και έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Βρείτε τα ακρότατα της $f|S$.

Λύση Έχουμε $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$, οπότε θέτουμε $g(x, y) = y - x - 1$ και $c = 0$. Έχουμε $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Τα σχετικά ακρότατα της $f|S$ πρέπει να αναζητηθούν μεταξύ των σημείων όπου το ∇f είναι ορθογώνιο με την S, δηλαδή όπου έχει κλίση -45°. Όμως, $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, που έχει την επιθυμητή κλίση μόνο όταν $x = -y$, δηλαδή όταν το (x, y) ανήκει στην ευθεία L που διέρχεται από την αρχή των αξόνων με κλίση -45°. Αυτό μπορεί να συμβεί στο σύνολο S μόνο για το μοναδικό σημείο όπου τέμνονται οι L και S (βλ. Σχήμα 3.4.3). Εξετάζοντας τις καμπύλες στάθμης της f διαπιστώνουμε ότι αυτό το σημείο, το $(-1/2, 1/2)$, είναι τοπικό ελάχιστο της $f|S$ (αλλά όχι της f).

Προσέξτε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ο περιορισμός της f στο S έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο.



Σχήμα 3.4.3 Η γεωμετρία της εύρεσης των ακροτάτων της $f(x, y) = x^2 + y^2$ περιορισμένης στο $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$.

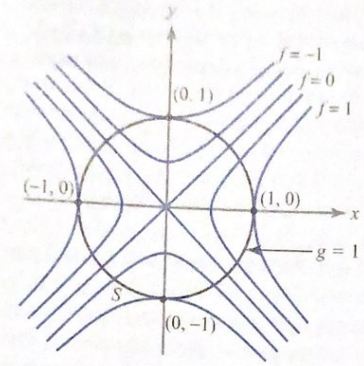
▲

Παράδειγμα 2 Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ και έστω S ο κύκλος ακτίνας 1 με κέντρο την αρχή των αξόνων. Βρείτε τα ακρότατα της $f|S$.

Λύση Το σύνολο S είναι η καμπύλη στάθμης της g με τιμή 1, όπου $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Επειδή έχουμε μελετήσει και τις δύο αυτές συναρτήσεις σε προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζουμε τις καμπύλες στάθμης τους· είναι αυτές που παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.4.4. Στις δύο διαστάσεις, η συνθήκη $\nabla f = \lambda \nabla g$ στο $\mathbf{x}_0$ —δηλαδή τα ∇f και ∇g να είναι παράλληλα στο $\mathbf{x}_0$— είναι ίδια με τη συνθήκη οι καμπύλες στάθμης να είναι εφαπτόμενες στο $\mathbf{x}_0$ (γιατί;). Συνεπώς, τα ακρότατα της $f|S$ είναι τα $(0, \pm 1)$ και $(\pm 1, 0)$. Υπολογίζοντας την τιμή της f, διαπιστώνουμε ότι τα $(0, \pm 1)$ είναι σημεία ελαχίστου και τα $(\pm 1, 0)$ σημεία μεγίστου.

Ας λύσουμε αυτό το πρόβλημα και αναλυτικά με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Προφανώς,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y) \quad \text{και} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$



Σχήμα 3.4.4 Η γεωμετρία του προβλήματος της εύρεσης των ακροτάτων της $x^2 - y^2$ στο $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Παρατηρούμε ότι $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ αν $x^2 + y^2 = 1$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange, πρέπει να βρούμε ένα λ τέτοιο ώστε

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \quad \text{και} \quad (x, y) \in S, \quad \text{δηλαδή} \ x^2 + y^2 = 1.$$

Αυτές οι συνθήκες δίνουν τρεις εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να λυθούν ως προς τους τρεις αγνώστους x, y και λ. Από την $2x = \lambda 2x$, συμπεραίνουμε ότι $x = 0$ ή $\lambda = 1$. Αν $x = 0$, τότε $y = \pm 1$, και από την $-2y = \lambda 2y$ έπεται ότι $\lambda = -1$. Αν $\lambda = 1$, τότε $y = 0$ και $x = \pm 1$. Επομένως, παίρνουμε τα σημεία $(0, \pm 1)$ και $(\pm 1, 0)$, όπως προηγουμένως. Όπως αναφέραμε, αυτή η μέθοδος απλώς εντοπίζει πιθανά ακρότατα· το αν είναι σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή τίποτα από τα δύο πρέπει να προσδιοριστεί με άλλους τρόπους, όπως με γεωμετρικούς συλλογισμούς ή με το κριτήριο δεύτερης παραγώγου που θα δούμε στη συνέχεια.[9] ▲

Παράδειγμα 3 Μεγιστοποιήστε τη συνάρτηση $f(x, y, z) = x + z$ υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Λύση Από το Θεώρημα 7 γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f περιορισμένη στη μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ έχει μέγιστο (και ελάχιστο). Για να βρούμε το μέγιστο, χρησιμοποιούμε και πάλι το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αναζητούμε λ και (x, y, z) τέτοια ώστε

$$1 = 2x\lambda, \qquad 0 = 2y\lambda \quad \text{και} \quad 1 = 2z\lambda,$$

και

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Από την πρώτη ή την τρίτη εξίσωση διαπιστώνουμε ότι $\lambda \neq 0$, οπότε από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $y = 0$. Από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση, $x = z$, οπότε από την τέταρτη, $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. Επομένως τα σημεία μας είναι τα $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Συγκρίνοντας τις τιμές της f σε αυτά τα σημεία, διαπιστώνουμε ότι το πρώτο σημείο δίνει το μέγιστο της f (υπό τον δεδομένο περιορισμό) και το δεύτερο το ελάχιστο. ▲

Παράδειγμα 4 Υποθέτουμε ότι μεταξύ όλων των ορθογώνιων κουτιών με δεδομένο εμβαδόν επιφάνειας 10 τετραγωνικών μέτρων υπάρχει ένα κουτί με τον μεγαλύτερο δυνατό όγκο. Βρείτε τις διαστάσεις του.

---

[9] Σε αυτά τα παραδείγματα, $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ στην επιφάνεια S, όπως απαιτείται από το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αν το $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ ήταν μηδέν για κάποιο $\mathbf{x}_0$ στο S, θα έπρεπε να συμπεριληφθεί στα πιθανά ακρότατα.

Λύση Αν x, y και z είναι τα μήκη των πλευρών, έχουμε $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, αντίστοιχα, και ο όγκος είναι $f(x,y,z) = xyz$. Ο περιορισμός είναι $2(xy + xz + yz) = 10$, δηλαδή $xy + xz + yz = 5$. Άρα οι συνθήκες για τον πολλαπλασιαστή Lagrange είναι

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(y+z) \\ xz &= \lambda(x+z) \\ xy &= \lambda(y+x) \\ xy + xz + yz &= 5. \end{aligned}$$

Κατ' αρχάς, $x \neq 0$, διότι αν $x = 0$ τότε $yz = 5$ και $0 = \lambda z$, άρα $\lambda = 0$ οπότε προκύπτει η αντίφαση $yz = 0$. Με αντίστοιχο τρόπο, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x + y \neq 0$. Με απαλοιφή του λ από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $yz/(y+z) = xz/(x+z)$, το οποίο δίνει $x = y$. Με αντίστοιχο τρόπο, $y = z$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην τελευταία εξίσωση, παίρνουμε $3x^2 = 5$, δηλαδή $x = \sqrt{5/3}$. Άρα παίρνουμε τη λύση $x = y = z = \sqrt{5/3}$, και $xyz = (5/3)^{3/2}$. Επομένως, αυτό το (κυβικό) σχήμα πρέπει να μεγιστοποιεί τον όγκο, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κουτί μέγιστου όγκου. ▲

Ύπαρξη λύσεων

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στη λύση του Παραδείγματος 4 *δεν* αποδεικνύεται ότι ο κύβος είναι το ορθογώνιο κουτί μεγαλύτερου όγκου με δεδομένο εμβαδόν επιφάνειας· αποδεικνύεται ότι ο κύβος είναι ο μόνος δυνατός υποψήφιος για το μέγιστο. Θα περιγράψουμε αργότερα μια απόδειξη για το ότι είναι πράγματι το μέγιστο. Η διάκριση μεταξύ της απόδειξης ότι υπάρχει *μόνο μία δυνατή λύση* σε ένα πρόβλημα και ότι *υπάρχει* πράγματι *μια λύση* είναι ένα λεπτό ζήτημα το οποίο παρέβλεψαν πολλοί (ακόμα και μεγάλοι) μαθηματικοί.

Η βασίλισσα Διδώ (περί το 900 π.Χ.) συνειδητοποίησε ότι, μεταξύ όλων των επίπεδων περιοχών με δεδομένη περιφέρεια, ο δίσκος είναι το χωρίο με το μεγαλύτερο εμβαδόν. Αυτό δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί υπό την παραδοχή ότι υπάρχει χωρίο μέγιστου εμβαδού. Όμως η απόδειξη ότι υπάρχει χωρίο μέγιστου εμβαδού αποτελεί αρκετά διαφορετικό (και δύσκολο) ζήτημα. Η πλήρης απόδειξη δόθηκε μόλις στο δεύτερο μισό του δέκατου ένατου αιώνα από τον Γερμανό μαθηματικό Weierstrass.

Ας δούμε ένα μη μαθηματικό ανάλογο αυτής της κατάστασης. Ας μπούμε στη θέση του λόρδου Peter Wimsey, του διάσημου ντετέκτιβ της Dorothy Sayers:

> «Αναμφίβολα», είπε ο Wimsey, «αν όμως νομίζεις ότι αυτή η ταυτοποίηση θα σου κάνει τη ζωή ένα μεγάλο, γλυκό τραγούδι, πλανάσαι... . Δεδομένου ότι έχουμε αφιερώσει πολύ χρόνο και σκέψη σε αυτή την υπόθεση κάνοντας την παραδοχή ότι ήταν δολοφονία, είναι βολικό να γνωρίζουμε ότι η παραδοχή είναι σωστή.»[10]

Ο Wimsey βρίσκει το πτώμα ενός άντρα και ύστερα από κάποιο χρονικό διάστημα έχει εντοπίσει δέκα υπόπτους. Είναι σίγουρος ότι κανένας άλλος πέραν αυτών των υπόπτων δεν μπορεί να είναι ο δολοφόνος. Συλλέγοντας όλα τα στοιχεία και ελέγχοντας τα άλλοθι, μειώνει το πλήθος των υπόπτων κατά έναν κάθε φορά, μέχρι, τελικά, να απομείνει μόνο ο μπάτλερ· άρα είναι ο δολοφόνος! Ωστόσο, ο Peter είναι πολύ προσεκτικός άνθρωπος. Ελέγχοντας ξανά τα πάντα, ανακαλύπτει ότι ο άντρας αυτοκτόνησε· άρα δεν ήταν δολοφονία. Καταλαβαίνετε τι σημαίνει αυτό: Δεν αρκεί να βρούμε έναν μοναδικό, αναμφίβολα ύποπτο στην περίπτωση μιας ποινικής υπόθεσης όπου υπάρχει υποψία δολοφονίας· πρέπει να αποδείξουμε ότι διαπράχθηκε πράγματι δολοφονία.

Το ίδιο ισχύει για τον κύβο μας. Το γεγονός ότι είναι ο μόνος δυνατός υποψήφιος για το μέγιστο δεν αποτελεί απόδειξη ότι είναι το μέγιστο. (Για περισσότερες πληροφορίες βλ. *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, των S. Hildebrandt και

[10] Dorothy L. Sayers, *Have His Carcase*, Κεφάλαιο 31: The Evidence of the Haberdasher's Assistant, New York, Avon Books, 1968, σελ. 312.

A. Tromba, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1995.)

Το βασικό εμπόδιο στην απόδειξη του ότι η $f(x,y,z) = xyz$ έχει πράγματι μέγιστο έγκειται στο γεγονός ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στη μη φραγμένη επιφάνεια $S\colon xy + xz + yz = 5$, και όχι σε κάποιο φραγμένο σύνολο, που περιλαμβάνει το σύνορό του, όπου θα μπορούσε να εφαρμοστεί το Θεώρημα 7 της Ενότητας 3.3. Έχουμε ήδη δει προβλήματα αυτού του είδους για συναρτήσεις μίας και δύο μεταβλητών.

Ο τρόπος για να αποδείξουμε ότι η $f(x,y,z) = xyz \geq 0$ έχει πράγματι μέγιστο στην $xy + yz + xz = 5$ είναι να δείξουμε ότι αν τα x, y ή z τείνουν στο ∞, τότε $f(x,y,z) \to 0$. Έτσι θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι το μέγιστο της f στην S πρέπει να υπάρχει επικαλούμενοι το Θεώρημα 7 (θα πρέπει να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες). Επομένως, ας υποθέσουμε ότι το (x,y,z) ανήκει στην S και $x \to \infty$, οπότε $y \to 0$ και $z \to 0$ (γιατί;). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση ορισμού της S με z, παίρνουμε την εξίσωση $xyz + xz^2 + yz^2 = 5z \to 0$ καθώς $x \to \infty$. Επειδή $x, y, z \geq 0$, $xyz = f(x,y,z) \to 0$. Με αντίστοιχο τρόπο, $f(x,y,z) \to 0$ αν το y ή το z τείνει στο ∞. Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει κουτί μέγιστου όγκου.

Μερικές γενικές κατευθυντήριες οδηγίες μπορεί να είναι χρήσιμες για τα προβλήματα όπου αναζητούμε μέγιστα η ελάχιστα υπό περιορισμούς. Πρώτα απ' όλα, αν η επιφάνεια S είναι φραγμένη (όπως είναι τα ελλειψοειδή, για παράδειγμα), τότε η f πρέπει να έχει μέγιστο και ελάχιστο στην S. (Βλ. Θεώρημα 7 της προηγούμενης ενότητας.) Ειδικότερα, αν η f έχει μόνο δύο σημεία που ικανοποιούν τις συνθήκες των σχετικών με τους πολλαπλασιαστές Lagrange θεωρημάτων ή το Θεώρημα 9, τότε το ένα πρέπει να είναι μέγιστο και το άλλο πρέπει να είναι ελάχιστο. Υπολογίζοντας την τιμή της f σε αυτά τα δύο σημεία μπορούμε να διαπιστώσουμε ποιο είναι το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο. Αν όμως υπάρχουν περισσότερα από δύο τέτοια σημεία, κάποια μπορεί να είναι σαγματικά σημεία. Αν η S δεν είναι φραγμένη (για παράδειγμα, αν είναι ένα υπερβολοειδές), τότε η f δεν έχει απαραίτητα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου.

Περισσότεροι του ενός περιορισμοί

Αν η επιφάνεια S ορίζεται από πολλούς περιορισμούς, συγκεκριμένα,

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k \end{array}\right\}, \tag{4}$$

το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange μπορεί να γενικευτεί ως εξής: *Αν η f έχει μέγιστο ή ελάχιστο στην S στο σημείο $\mathbf{x}_0$, πρέπει να υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ τέτοιες ώστε*[11]

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε αυτή την περίπτωση γενικεύοντας τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε το θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα σχετικά με τον τρόπο χρήσης της γενικότερης αυτής μορφής του θεωρήματος.

Παράδειγμα 5 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y,z) = x + y + z$ υπό τις δύο συνθήκες $x^2 + y^2 = 2$ και $x + z = 1$.

Λύση Έχουμε δύο περιορισμούς:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{και} \quad g_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0.$$

[11]Όπως με την υπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ στο θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange, πρέπει να κάνουμε την παραδοχή ότι τα διανύσματα $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή κανένα $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων $\nabla g_j(\mathbf{x}_0)$, $j \neq i$.

Άρα πρέπει να βρούμε x, y, z, λ_1 και λ_2 τέτοια ώστε

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z),$$
$$g_1(x,y,z) = 0 \quad \text{και} \quad g_2(x,y,z) = 0.$$

Υπολογίζοντας τις κλίσεις και εξισώνοντας συνιστώσες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0, \\ 1 &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1, \\ x^2 + y^2 &= 2 \quad \text{και} \quad x + z = 1. \end{aligned}$$

Αυτές είναι πέντε εξισώσεις με αγνώστους τα x, y, z, λ_1 και λ_2. Από την τρίτη εξίσωση, $\lambda_2 = 1$, άρα $2x\lambda_1 = 0, 2y\lambda_1 = 1$. Επειδή από τη δεύτερη έπεται ότι $\lambda_1 \neq 0$, έχουμε $x = 0$. Επομένως, $y = \pm\sqrt{2}$ και $z = 1$. Άρα τα δυνατά ακρότατα είναι τα $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Ελέγχοντας τις τιμές, διαπιστώνουμε ότι το $(0, \sqrt{2}, 1)$ είναι τοπικό μέγιστο και το $(0, -\sqrt{2}, 1)$ τοπικό ελάχιστο.

Από τη συνθήκη $x^2+y^2 = 2$ έπεται ότι τα x και y πρέπει να φραγμένα. Από τη συνθήκη $x+z = 1$ έπεται ότι το z είναι επίσης φραγμένο. Έπεται ότι το περιορισμένο σύνολο S είναι κλειστό και φραγμένο. Από το Θεώρημα 7 έπεται ότι η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο S, τα οποία πρέπει συνεπώς να εμφανίζονται στα $(0, \sqrt{2}, 1)$ και $(0, -\sqrt{2}, 1)$, αντίστοιχα. ▲

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange μάς προσφέρει ένα ακόμη εργαλείο εντοπισμού των σημείων απόλυτου μεγίστου και ελαχίστου των παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}^2$ (βλ. τη στρατηγική εύρεσης του απόλυτου μεγίστου και ελαχίστου στην Ενότητα 3.3).

Παράδειγμα 6 Βρείτε το απόλυτο μέγιστο της $f(x,y) = xy$ στον μοναδιαίο δίσκο D, όπου D είναι το σύνολο των σημείων (x,y) με $x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση Από το Θεώρημα 7 της Ενότητας 3.3 ξέρουμε ότι το απόλυτο μέγιστο υπάρχει. Αρχικά βρίσκουμε όλα τα κρίσιμα σημεία της f στο U, το σύνολο των σημείων (x,y) με $x^2 + y^2 < 1$. Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

το $(0,0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο U. Στη συνέχεια θεωρούμε τον περιορισμό της f στον μοναδιαίο κύκλο, την καμπύλη στάθμης $g(x,y) = 1$, όπου $g(x,y) = x^2 + y^2$. Για να εντοπίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στον C, σχηματίζουμε τις εξισώσεις των πολλαπλασιαστών Lagrange: $\nabla f(x,y) = (y,x) = \lambda\nabla g(x,y) = \lambda(2x, 2y)$ και $x^2 + y^2 = 1$. Αναλύοντάς τις σε συνιστώσες, παίρνουμε

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Άρα

$$y = 4\lambda^2 y,$$

δηλαδή $\lambda = \pm 1/2$ και $y = \pm x$, που σημαίνει ότι $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ ή $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. Στον C υπολογίζουμε τέσσερα υποψήφια σημεία για το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο, συγκεκριμένα,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Η τιμή της f στα σημεία $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ και $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ είναι $1/2$. Η τιμή της f στα $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ και $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ είναι $-1/2$, ενώ η τιμή της f στο $(0,0)$ είναι 0. Άρα το απόλυτο μέγιστο της f είναι $1/2$ και το απόλυτο ελάχιστο $-1/2$, τα οποία εμφανίζονται αμφότερα στον C. Στο $(0,0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ και $\partial^2 f/\partial x\,\partial y = 1$, άρα η διακρίνουσα είναι -1 και συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο. ▲

Παράδειγμα 7 Βρείτε το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο της $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ στο ελλειπτικό χωρίο D που ορίζεται από την $\frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση Και πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα 7 της Ενότητας 3.3, το απόλυτο μέγιστο υπάρχει. Αρχικά εντοπίζουμε τα κρίσιμα σημεία της f στο U, το σύνολο των σημείων (x,y) με $\frac{1}{2}x^2 + y^2 < 1$. Επειδή

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι η αρχή των αξόνων $(0,0)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f στο C, το σύνορο του U, που είναι η καμπύλη στάθμης $g(x,y) = 1$, όπου $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. Οι εξισώσεις του πολλαπλασιαστή Lagrange είναι

$$\nabla f(x,y) = (x,y) = \lambda \nabla g(x,y) = \lambda(x, 2y)$$

και $(x^2/2) + y^2 = 1$. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned} x &= \lambda x \\ y &= 2\lambda y \\ \frac{x^2}{2} + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Αν $x = 0$, τότε $y = \pm 1$ και $\lambda = \frac{1}{2}$. Αν $y = 0$, τότε $x = \pm\sqrt{2}$ και $\lambda = 1$. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, παίρνουμε $\lambda = 1$ και $1/2$, πράγμα αδύνατο. Επομένως, υποψήφια σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο C είναι τα $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, ενώ για την f μέσα στο D υποψήφιο είναι το $(0,0)$. Η τιμή της f στο $(0, \pm 1)$ είναι $1/2$, στο $(\pm\sqrt{2}, 0)$ είναι 1 και στο $(0,0)$ είναι 0. Άρα το απόλυτο ελάχιστο της f εμφανίζεται στο $(0,0)$ και είναι 0. Το απόλυτο μέγιστο της f στο D είναι επομένως 1 και εμφανίζεται στα σημεία $(\pm\sqrt{2}, 0)$. ▲

Ολικά μέγιστα και ελάχιστα

Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange μάς επιτρέπει να βελτιώσουμε τις τεχνικές εύρεσης των σημείων ολικού μεγίστου και ελαχίστου που διαθέτουμε. Σε σχέση με αυτό, θα μας φανούν χρήσιμα τα ακόλουθα.

Ορισμός Έστω U ένα ανοιχτό χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο ∂U. Λέμε ότι το ∂U είναι ***ομαλό*** αν το ∂U είναι το σύνολο στάθμης μιας ομαλής συνάρτησης g της οποίας η κλίση ∇g δεν μηδενίζεται πουθενά στο ∂U (δηλαδή $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την ακόλουθη στρατηγική.

Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση απόλυτων μεγίστων και ελαχίστων σε χωρία με σύνορο Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο $D = U \cup \partial U$, όπου το U είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο ∂U.

Για να βρούμε το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο της f στο D:

(i) Εντοπίζουμε όλα τα κρίσιμα σημεία της f στο U.

(ii) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να εντοπίσουμε όλα τα κρίσιμα σημεία της $f|\partial U$.

(iii) Υπολογίζουμε τις τιμές της f σε όλα αυτά τα κρίσιμα σημεία.

(iv) Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή.

...ειγμα 8 Βρείτε το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y$ στο σύνολο $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Λύση Όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζουμε ότι το απόλυτο μέγιστο και ελάχιστο υπάρχει. Έχουμε $D = U \cup \partial U$, όπου

$$U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

και

$$\partial U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Επίσης, $\nabla f(x, y, z) = (2x - 1, 2y + 1, 2z)$.

Άρα $\nabla f = 0$ στο $(1/2, -1/2, 0)$ το οποίο ανήκει στο U, το εσωτερικό του D.

Έστω $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Το ∂U είναι το σύνολο στάθμης $g(x, y, z) = 1$. Σύμφωνα με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, το μέγιστο και το ελάχιστο πρέπει να εμφανίζονται σε ένα κρίσιμο σημείο της $f|\partial U$, δηλαδή σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ όπου $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ για κάποιον πραγματικό αριθμό λ.

Επομένως,

$$(2x - 1, 2y + 1, 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

ή

(i) $2x - 1 = 2\lambda x$

(ii) $2y + 1 = 2\lambda y$

(iii) $2z = 2\lambda z$

Αν $\lambda = 1$, θα είχαμε $2x - 1 = 2x$ ή $-1 = 0$, πράγμα αδύνατο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lambda \neq 0$, αφού αν $\lambda = 0$ παίρνουμε μόνο ένα εσωτερικό σημείο όπως παραπάνω. Άρα από την (iii) έπεται ότι $z = 0$ και

(iv) $x^2 + y^2 = 1$.

Λύνοντας τις (i) και (ii) ως προς x και y βρίσκουμε

(v) $x = 1/2(1 - \lambda)$

(vi) $y = -1/2(1 - \lambda)$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (iv) μπορούμε να λύσουμε ως προς λ, οπότε παίρνουμε $\lambda = 1 \pm (1/\sqrt{2})$. Άρα από τις (v) και (vi) έχουμε ότι $x = \pm(1/\sqrt{2})$ και $y = \pm(1/\sqrt{2})$.

δηλαδή έχουμε τέσσερα κρίσιμα σημεία στο ∂U. Υπολογίζοντας την τιμή της f σε καθένα από αυτά τα σημεία, διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο ∂U είναι $1 + 2/\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$ και η ελάχιστη τιμή είναι $1 - \sqrt{2}$. Η τιμή της f στο $(1/2, -1/2)$ είναι $-1/2$. Συγκρίνοντας αυτές τις τιμές και παρατηρώντας ότι $-1/2 < 1 - \sqrt{2}$, διαπιστώνουμε ότι το απόλυτο ελάχιστο είναι $-1/2$ και εμφανίζεται στο $(1/2, -1/2)$, ενώ το απόλυτο μέγιστο είναι $1 + \sqrt{2}$ και εμφανίζεται στο $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. ▲

Δύο ακόμα εφαρμογές

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζουμε δύο ακόμη εφαρμογές των μαθηματικών τεχνικών που αναπτύξαμε σε αυτή την ενότητα, στη γεωμετρία και στα οικονομικά. Θα ξεκινήσουμε με ένα γεωμετρικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 9 Έστω ότι έχουμε μια καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0.$$

Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση της καμπύλης από την αρχή των αξόνων. (Πρόκειται για το μήκος του ***μεγάλου*** και του ***μικρού*** ημιάξονα αυτής της τετραγωνικής μορφής.)

Λύση Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση των ακρότατων τιμών της $f(x, y) = x^2 + y^2$ υπό την περιοριστική συνθήκη $\phi(x, y) = 0$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0 \tag{6}$$
$$2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0 \tag{7}$$
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \tag{8}$$

Προσθέτοντας το x επί την εξίσωση (6) στο y επί την εξίσωση (7), παίρνουμε

$$2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = 0.$$

Από την εξίσωση (8) έπεται ότι $x^2 + y^2 + \lambda = 0$. Έστω $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$ [η περίπτωση $\lambda = 0$ είναι αδύνατη, διότι το $(0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη $\phi(x, y) = 0$]. Τότε οι εξισώσεις (6) και (7) γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2(A - t)x + 2By &= 0 \\ 2Bx + 2(C - t)y &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Αν οι δύο αυτές εξισώσεις έχουν κάποια μη τετριμμένη λύση [υπενθυμίζουμε ότι το $(x, y) = (0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη μας άρα δεν είναι λύση], από ένα θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας έπεται ότι η ορίζουσά τους μηδενίζεται:[12]

$$\begin{vmatrix} A - t & B \\ B & C - t \end{vmatrix} = 0.$$

[12] Ο πίνακας των συντελεστών αυτών των εξισώσεων δεν μπορεί να έχει αντίστροφο, διότι αυτό θα σήμαινε ότι η λύση είναι μηδέν. Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας που δεν έχει αντίστροφο έχει ορίζουσα ίση με μηδέν.

Επειδή αυτή η εξίσωση είναι τετραγωνική ως προς t, υπάρχουν δύο λύσεις, τις οποίες θα ονομάσουμε t_1 και t_2. Επειδή $-\lambda = x^2 + y^2$, έχουμε $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\lambda}$. Όμως $\sqrt{x^2 + y^2}$ είναι η απόσταση του σημείου (x, y) από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς, αν (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οι μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης (9) που αντιστοιχούν στα t_1 και t_2, και αν τα t_1 και t_2 είναι θετικά, παίρνουμε $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$ και $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$. Συνεπώς, αν $t_1 > t_2$, τα μήκη του μικρού και μεγάλου ημιάξονα είναι $1/\sqrt{t_1}$ και $1/\sqrt{t_2}$, αντίστοιχα. Αν η καμπύλη είναι έλλειψη, τα t_1 και t_2 είναι, μάλιστα, αμφότερα πραγματικά και θετικά. Τι συμβαίνει στην περίπτωση μιας υπερβολής ή παραβολής; ▲

Τέλος, θα δούμε μια εφαρμογή στα οικονομικά.

Παράδειγμα 10 Υποθέτουμε ότι μια βιομηχανία παράγει ποσότητα Q κάποιου προϊόντος, και ότι το Q είναι μια συνάρτηση $f(K, L)$, όπου K είναι η ποσότητα του κεφαλαιουχικού εξοπλισμού (ή επένδυση) και L η ποσότητα εργασίας που χρησιμοποιούνται. Αν η τιμή της εργασίας είναι p, η τιμή του κεφαλαίου είναι q και η εταιρεία δεν μπορεί να δαπανήσει περισσότερα από B δολάρια, πώς μπορούμε να επιλέξουμε την ποσότητα κεφαλαίου και εργασίας ώστε να μεγιστοποιήσουμε την παραγωγή Q;

Λύση Θα περιμέναμε ότι αν αυξηθεί η ποσότητα του κεφαλαίου ή της εργασίας, θα πρέπει να αυξηθεί και η παραγωγή Q, δηλαδή

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0.$$

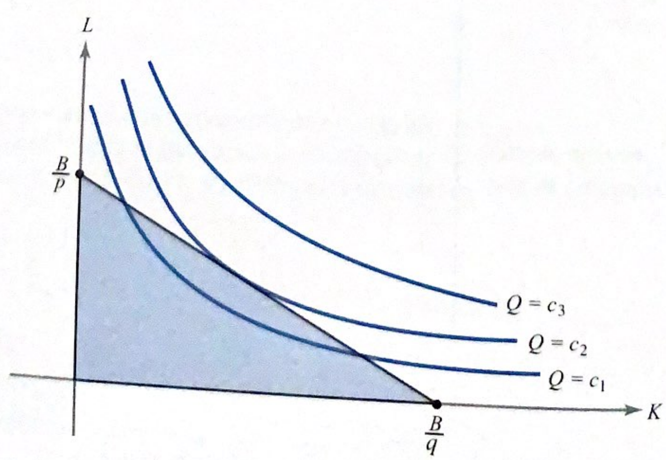
Περιμένουμε επίσης ότι καθώς προστίθεται επιπλέον εργασία σε μια δεδομένη ποσότητα κεφαλαιουχικού εξοπλισμού, θα παίρνουμε λιγότερη επιπλέον παραγωγή για τον κόπο μας, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

Ομοίως,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0.$$

Με αυτές τις παραδοχές για την Q, είναι εύλογο να περιμένουμε ότι οι καμπύλες στάθμης της παραγωγής (που καλούνται ***καμπύλες ισοπαραγωγής***) $Q(K, L) = c$ μοιάζουν με τις καμπύλες του Σχήματος 3.4.5, με $c_1 < c_2 < c_3$.



Σχήμα 3.4.5 Ποια είναι η μέγιστη τιμή της Q στο σκιασμένο τρίγωνο;

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την κυρτότητα των καμπυλών ισοπαραγωγής ως εξής: Καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά κατά μήκος μιας δεδομένης καμπύλης ισοπαραγωγής, απαιτείται ολοένα και περισσότερο κεφάλαιο για να αντικαταστήσουμε μια μονάδα εργασίας και να συνεχίσουμε να έχουμε την ίδια παραγωγή. Ο περιορισμός προϋπολογισμού σημαίνει ότι πρέπει να παραμείνουμε εντός του τριγώνου που φράσσεται από τους άξονες και την ευθεία $pL+qK = B$. Γεωμετρικά, είναι προφανές ότι παράγουμε το μέγιστο δυνατό αν δαπανήσουμε όλα τα χρήματά μας με τρόπο ώστε να επιλέξουμε την καμπύλη ισοπαραγωγής που απλώς αγγίζει, χωρίς να τέμνει, την ευθεία του προϋπολογισμού.

Επειδή το μέγιστο βρίσκεται στο σύνορο του πεδίου μας, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρούμε το μέγιστο. Για να μεγιστοποιήσουμε την $Q = f(K, L)$ υπό τον περιορισμό $pL+qK = B$, αναζητούμε τα κρίσιμα σημεία της βοηθητικής συνάρτησης

$$h(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(pL + qK - B).$$

Επομένως, θέλουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \quad \text{και} \quad pL + qK = B.$$

Αυτές είναι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να μεγιστοποιηθεί η παραγωγή. (Στην Άσκηση 36 σας ζητείται να ασχοληθείτε με μια ειδική περίπτωση.) ▲

Στο προηγούμενο παράδειγμα, το λ αναπαριστά κάτι ενδιαφέρον. Αν θέσουμε $k = qK$ και $l = pL$, έτσι ώστε k να είναι η αξία σε δολάρια του χρησιμοποιούμενου κεφαλαίου και l η αξία σε δολάρια της χρησιμοποιούμενης εργασίας, τότε οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Επομένως, στο σημείο βέλτιστης παραγωγής η οριακή μεταβολή της παραγωγής ανά αξία σε δολάρια επιπλέον κεφαλαιακής επένδυσης ισούται με την οριακή μεταβολή της παραγωγής ανά αξία σε δολάρια επιπλέον εργασίας, και λ είναι η κοινή αυτή τιμή. Στο βέλτιστο σημείο, αν ανταλλάξουμε κεφάλαιο αξίας ενός δολαρίου με εργασία αξίας ενός δολαρίου η παραγωγή δεν μεταβάλλεται. Μακριά από το βέλτιστο σημείο, οι περιθώριες αποδόσεις είναι διαφορετικές και οποιαδήποτε ανταλλαγή οδηγεί σε αύξηση της παραγωγής.

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για ακρότατα υπό συνθήκη

Στην Ενότητα 3.3 αναπτύξαμε ένα κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τα ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών εξετάζοντας τον δευτεροβάθμιο όρο της σειράς Taylor της f. Αν ο εσσιανός πίνακας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης είναι είτε θετικά είτε αρνητικά ορισμένος σε ένα κρίσιμο σημείο της f, το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο, αντίστοιχα.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν υπάρχει κάποιο κριτήριο δεύτερης παραγώγου για τα προβλήματα εύρεσης μεγίστου και ελαχίστου *παρουσία περιορισμών*. Η απάντηση είναι ναι, και το κριτήριο χρησιμοποιεί έναν πίνακα που καλείται *φραγμένη εσσιανή*. Θα παρουσιάσουμε αρχικά το κριτήριο και τον τρόπο εφαρμογής του για την περίπτωση μιας συνάρτησης $f(x, y)$ δύο μεταβλητών υπό τον περιορισμό $g(x, y) = c$.

Θεώρημα 10 Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $g\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ομαλές (τουλάχιστον C^2) συναρτήσεις. Έστω $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$ και S η καμπύλη στάθμης της g με τιμή c. Υποθέτουμε ότι $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ και ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Σχηματίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $h = f - \lambda g$ και υπολογίζουμε την ορίζουσα της ***φραγμένης εσσιανής***

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{στο } \mathbf{v}_0.$$

(i) Αν $|\bar{H}| > 0$, τότε το $\mathbf{v}_0$ είναι τοπικό μέγιστο της $f|S$.

(ii) Αν $|\bar{H}| < 0$, τότε το $\mathbf{v}_0$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f|S$.

(iii) Αν $|\bar{H}| = 0$, δεν προκύπτει κάποιο συμπέρασμα· το $\mathbf{v}_0$ μπορεί να είναι ελάχιστο, μέγιστο ή τίποτα από τα δύο.

Αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα αυτής της ενότητας.

[Παραδ]ειγμα 11 Βρείτε τα ακρότατα της $f(x, y) = (x - y)^n$ υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$, όπου $n \geq 1$.

Λύση Εξισώνουμε με το 0 τις πρώτες παραγώγους της βοηθητικής συνάρτησης h που ορίζεται από την $h(x, y, \lambda) = (x - y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} n(x-y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x-y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

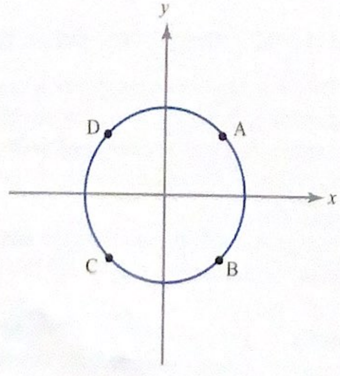
Από τις δύο πρώτες εξισώσεις διαπιστώνουμε ότι $\lambda(x + y) = 0$. Αν $\lambda = 0$, έχουμε ότι $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε $x = -y$. Τα τέσσερα κρίσιμα σημεία αναπαριστώνται στο Σχήμα 3.4.6 και οι αντίστοιχες τιμές της $f(x, y)$ είναι οι εξής:

(A) $x = \sqrt{2}/2$ $\quad y = \sqrt{2}/2$ $\quad \lambda = 0$ $\quad f(x, y) = 0$

(B) $x = \sqrt{2}/2$ $\quad y = -\sqrt{2}/2$ $\quad \lambda = n(\sqrt{2})^{n-2}$ $\quad f(x, y) = (\sqrt{2})^n$

(C) $x = -\sqrt{2}/2$ $\quad y = -\sqrt{2}/2$ $\quad \lambda = 0$ $\quad f(x, y) = 0$

(D) $x = -\sqrt{2}/2$ $\quad y = \sqrt{2}/2$ $\quad \lambda = (-1)^{n-2} n(\sqrt{2})^{n-2}$ $\quad f(x, y) = (-\sqrt{2})^n$.



Σχήμα 3.4.6 Τα τέσσερα κρίσιμα σημεία του Παραδείγματος 11.

Με απευθείας παρατήρηση, διαπιστώνουμε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε τα A και C είναι σημεία ελαχίστου ενώ τα B και D σημεία μεγίστου. Αν ο n είναι περιττός, τότε το B είναι σημείο μεγίστου, το D σημείο ελαχίστου, ενώ τα A και C δεν είναι τίποτα από τα δύο. Θα εξετάσουμε αν αυτές οι παρατηρήσεις συμφωνούν με το Θεώρημα 10.

Η ορίζουσα της φραγμένης εσσιανής είναι

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ -2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2).$$

Αν $n = 1$ ή αν $n \geq 3$, τότε $|\bar{H}| = 0$ στα A, B, C και D. Αν $n = 2$, τότε $|\bar{H}| = 0$ στα B και D, και -16 στα A και C. Επομένως, το κριτήριο δεύτερης παραγώγου εντοπίζει τα σημεία ελαχίστου A και C, αλλά δεν καταλήγει σε συμπέρασμα για τα σημεία μεγίστου B και D για $n = 2$. Δεν καταλήγει σε συμπέρασμα ούτε για όλες τις άλλες τιμές του n. ▲

Ακριβώς όπως στην περίπτωση χωρίς περιορισμούς, υπάρχει ένα κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις περισσότερων των δύο μεταβλητών. Αν θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της $f(x_1, \ldots, x_n)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, \ldots, x_n) = c$, σχηματίζουμε αρχικά τη φραγμένη εσσιανή της βοηθητικής συνάρτησης $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{-\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{-\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{-\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{-\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις ορίζουσες των διαγώνιων υποπινάκων τάξης ≥ 3 στα κρίσιμα σημεία της h. Αν είναι όλες αρνητικές, δηλαδή αν

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1\,\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_2\,\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \ldots,$$

τότε βρισκόμαστε σε τοπικό ελάχιστο της $f|S$. Αν ξεκινούν με μια θετική υποορίζουσα 3×3 και το πρόσημό τους εναλλάσσεται (δηλαδή >0, <0, >0, <0, …), τότε βρισκόμαστε σε τοπικό μέγιστο. Αν είναι όλες μη μηδενικές και δεν ισχύει κάτι από τα προηγούμενα, το σημείο δεν είναι ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (λέμε ότι είναι σαγματικού τύπου).[13]

Παράδειγμα 12 Μελετήστε τα τοπικά ακρότατα της $f(x, y, z) = xyz$ στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο δεύτερης παραγώγου.

Λύση Εξισώνοντας με μηδέν τις μερικές παραγώγους της βοηθητικής συνάρτησης $h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Επομένως, $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$. Αν $\lambda = 0$, οι λύσεις είναι $(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$ και $(0, 0, \pm 1, 0)$. Αν $\lambda \neq 0$, τότε έχουμε $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$, οπότε $z^2 = \frac{1}{3}$. Με αντίστοιχο τρόπο, $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$. Άρα οι λύσεις δίνονται από την $\lambda = \frac{3}{2}xyz = \pm\sqrt{3}/6$. Τα κρίσιμα σημεία της h και οι αντίστοιχες τιμές της f δίνονται στον Πίνακα 3.1, απ' όπου διαπιστώνουμε ότι τα σημεία E, F, G και K είναι σημεία ελαχίστου. Τα σημεία D, H, I και J είναι σημεία μεγίστου. Για να δούμε αν αυτά τα αποτελέσματα συμφωνούν με το κριτήριο δεύτερης παραγώγου, πρέπει να εξετάσουμε δύο ορίζουσες. Αρχικά εξετάζουμε την

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2/\partial x\,\partial y \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix}$$
$$= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2).$$

Παρατηρούμε ότι πρόσημο$(|\bar{H}_2|)$ = πρόσημο(λ) = πρόσημο(xyz), όπου το πρόσημο ενός αριθμού είναι 1 αν ο αριθμός είναι θετικός και -1 αν είναι αρνητικός. Στη συνέχεια εξετάζουμε την

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial z \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial z \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x\,\partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y\,\partial z \\ -\partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x\,\partial z & \partial^2 h/\partial y\,\partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix},$$

η οποία ισούται με $+4$ στα σημεία $\pm A$, $\pm B$ και $\pm C$, και με $-\frac{16}{3}$ στα υπόλοιπα οκτώ σημεία. Στα E, F, G και K έχουμε $|\bar{H}_2| < 0$ *και* $|\bar{H}_3| < 0$, οπότε το κριτήριο λέει ότι είναι τοπικά ελάχιστα. Στα D, H, I και J έχουμε $|\bar{H}_2| > 0$ και $|\bar{H}_3| < 0$, οπότε το κριτήριο λέει ότι είναι τοπικά μέγιστα. Τέλος, σύμφωνα με το κριτήριο δεύτερης παραγώγου τα $\pm A$, $\pm B$ και $\pm C$ είναι σαγματικά σημεία. ▲

[13] Για λεπτομερή ανάλυση, βλ. C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965· Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, New York, 1977, σελ. 263–271· ή D. Spring, *Am. Math. Mon.* 92 (1985) 631–643.